PHƯƠNG PHÁP TÍNH ĐỊNH THỨC ĐƯỢC CHO BỞI CÔNG THỨC TRUY HỒI

A DETERMINANT'S CALCULATION METHOD PROVIDED BY RECURRENT FORMULA

DƯƠNG THỊ XUÂN AN[1], NGUYỄN NGỌC NHẪN[2,a],
TRẦN HOÀI NGỌC NHÂN[3]

[1]*Trường Đại học Tài nguyên và Môi trường Thành phố Hồ Chí Minh*

[2,3]*Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Vĩnh Long*

[a]*Tác giả liên hệ: nhannn89@vlute.edu.vn*

Nhận bài (Received): 02/01/2024; Phản biện (Reviewed): 31/01/2024; Chấp nhận (Accepted): 14/03/2024

TÓM TẮT

Bài viết này trình bày một phương pháp tính định thức được cho bởi công thức truy hồi, từ đó đưa ra các ví dụ từ đề thi chính thức và đề đề nghị của các trường đại học, cao đẳng trong các kỳ thi Olympic Toán học học sinh, sinh viên toàn quốc. Nội dung chính của bài viết là tính định thức có công thức xác định dạng dãy truy hồi tuyến tính cấp 2 trong trường hợp phương trình đặc trưng có hai nghiệm thực phân biệt.

Từ khóa: Định thức, dãy truy hồi, phương pháp sai phân.

ABSTRACT

This paper reports the recurrence method of calculating the determinants of square matrices. We illustrate the proposed method using from official National Mathematical Olympiad exam questions and reference exam questions from various universities and colleges. The main purpose of this article is to address the determinants related to the form of quadratic linear recurrence sequences which has two distinct real roots.

Keywords: *Determinant, recurrence sequence, difference method.*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Định thức là một trong những khái niệm cơ bản trong môn Đại số tuyến tính. Thông qua giá trị của định thức (là một đặc trưng của ma trận), chúng ta có thể đưa ra nhiều kết luận về ma trận ban đầu. Có nhiều phương pháp để tính định thức, chẳng hạn như phương pháp khai triển theo dòng (cột), phương pháp đưa về dạng ma trận tam giác, phương pháp rút ra các nhân tử tuyến tính, phương pháp truy hồi, phương pháp sử dụng tính đa tuyến tính, … (Xem [1, Phần I (10)]).

Trong các phương pháp tính định thức thì phương pháp truy hồi bao gồm rất nhiều dạng biến thể trên cơ sở sai phân của dãy số. Từ một hệ thức giữa định thức cấp n và các định thức cấp thấp hơn cùng dạng, chúng ta cần xác định công thức tổng quát của định thức đó. Hai trường hợp thường gặp nhất là

$$D_n = aI + bD_{n-1} \text{ và } D_n = aD_{n-1} + bD_{n-2}.$$

Các dạng dãy số xác định bởi công thức truy hồi này thường xuyên xuất hiện trong các đề thi chính thức và đề đề nghị của các trường đại học, cao đẳng trong các kỳ thi Olympic Toán học sinh viên và học sinh toàn quốc (OLP) do Hội Toán học Việt Nam phối hợp với Bộ Giáo dục và Đào tạo, Trung ương Hội sinh viên Việt Nam và Liên hiệp các Hội Khoa học và Kỹ thuật Việt Nam tổ chức thường niên. Các đáp án chỉ trình bày công thức để quy nạp hoặc chứng minh trong trường hợp cụ thể chứ không trình bày lý thuyết tổng quát (xem [2]). Trong bài viết này, chúng tôi trình bày chi tiết phương pháp chéo hóa ma trận để tính số hạng tổng quát của dãy truy hồi tuyến tính cấp 2 dạng $D_n = aD_{n-1} + bD_{n-2}$, trong trường hợp phương trình đặc trưng $X^2 - aX - b = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt và ứng dụng vào giải các bài tập cụ thể trong các kỷ yếu của kỳ thi OLP Đại số sinh viên toàn quốc. Từ đó, người đọc có thể giải các bài tập cùng dạng, cũng như tổng quát trong các trường hợp phương trình đặc trưng có nghiệm kép hoặc có nghiệm phức và sáng tạo các bài toán tương tự. Phương pháp của chúng tôi khác với phương pháp đã được trình bày trong [3].

2. NỘI DUNG

2.1. Công thức tổng quát:

Cho dãy số thực (u_n) được xác định bởi công thức $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ với mọi $n \geq 1$, trong đó a, b là các hằng số thực. Khi đó ta có

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

Như vậy chúng ta cần tính A^n với

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Giả sử phương trình đặc trưng

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (a-\lambda)(-\lambda) - b = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - a\lambda - b = 0$$

có biệt thức $\Delta = a^2 + 4b > 0$. Khi đó, ta được hai giá trị riêng phân biệt của A là

$$t_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2+4b}}{2}.$$

- Với $t_1 = \dfrac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}$, ta được không gian con riêng ứng với giá trị riêng t_1 là $V_1 = \langle (t_1, 1) \rangle$.

- Với $t_2 = \dfrac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}$, ta được không gian con riêng ứng với giá trị riêng t_2 là $V_2 = \langle (t_2, 1) \rangle$.

Suy ra ma trận chéo hóa A là

$P = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ và dạng chéo của A là

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}.$$

Khi đó ta có

$$A^n = \left(PDP^{-1}\right)^n$$

$$= \left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right)\cdots\left(PDP^{-1}\right) = PD^nP^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1^n & 0 \\ 0 & t_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{t_1^{n+1} - t_2^{n+1}}{t_1 - t_2} & \dfrac{-t_1^{n+1}t_2 + t_1t_2^{n+1}}{t_1 - t_2} \\ \dfrac{t_1^n - t_2^n}{t_1 - t_2} & \dfrac{-t_1^n t_2 + t_1 t_2^n}{t_1 - t_2} \end{pmatrix}.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{t_1^{n+1} - t_2^{n+1}}{t_1 - t_2} & \dfrac{-t_1^{n+1}t_2 + t_1t_2^{n+1}}{t_1 - t_2} \\ \dfrac{t_1^n - t_2^n}{t_1 - t_2} & \dfrac{-t_1^n t_2 + t_1 t_2^n}{t_1 - t_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

hay

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_2^{n+1}.\dfrac{u_2 - t_1u_1}{t_2 - t_1} - t_1^{n+1}.\dfrac{u_2 - t_2u_1}{t_2 - t_1} \\ t_2^n.\dfrac{u_2 - t_1u_1}{t_2 - t_1} - t_1^n.\dfrac{u_2 - t_2u_1}{t_2 - t_1} \end{pmatrix}$$

Vậy

$$u_{n+2} = t_2^{n+1}.\frac{u_2 - t_1u_1}{t_2 - t_1} - t_1^{n+1}.\frac{u_2 - t_2u_1}{t_2 - t_1},$$

với $n \geq 1$ (*) .

Lưu ý với sinh viên: Các tính toán trên có thể thực hiện bằng phần mềm máy tính. Sinh viên cần nắm vững phương pháp, trong thực hành với các số cụ thể sẽ đơn giản hơn.

2.2. Các ví dụ:

Trong phần này chúng tôi nêu ra các ví dụ từ đề thi chính thức của các kỳ thi Olympic Toán học sinh viên và học sinh toàn quốc, sau đó chúng tôi trình bày cách giải áp dụng theo công thức mà chúng tôi thiết lập ở trên. Trong các kỳ thi, sinh viên cần trình bày chi tiết.

Ví dụ 1 (Bài 1, Đề thi chính thức OLP Đại số sinh viên toàn quốc năm 2017).

Cho dãy số (x_n) được xác định như sau: $x_1 = 3, x_2 = 7$ và $x_n, n \geq 3$, là định thức của ma trận vuông cấp n như sau

$$x_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

a. Tính x_5.

b. Chứng minh rằng $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$ với mọi $n \geq 3$.

c. Chứng minh rằng với mọi $n > 0$, $x_n + 1$ là một số tự nhiên và là lũy thừa của 2.

Giải

a. Bằng khai triển Laplace, ta tính được $x_3 = 15$, $x_4 = 31$ và $x_5 = 63$.

b. Bằng cách khai triển Laplace theo hàng đầu tiên ta thu được

$$x_n = 3\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Định thức thứ nhất bằng x_{n-1} còn định thức thứ hai bằng x_{n-2}. Vậy $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$.

c. Ta có $x_1 = 3, x_2 = 7$. Phương trình đặc trưng $X^2 - 3X + 2 = 0$ của công thức truy hồi có hai nghiệm là $t_1 = 1,\ t_2 = 2$.

Áp dụng công thức (*), ta được

$$x_{n+2}=t_2^{n+1}.\frac{x_2-t_1x_1}{t_2-t_1}-t_1^{n+1}.\frac{x_2-t_2x_1}{t_2-t_1}$$

$$=2^{n+1}.\frac{7-1.3}{2-1}-1^{n+1}.\frac{7-2.3}{2-1}=2^{n+3}-1,$$

với $n\ge 1$.

Ví dụ 2 (Bài 2, Đề thi chính thức OLP Đại số sinh viên toàn quốc năm 2018). [1]

Người ta khảo sát một mô hình di cư dân số giữa hai vùng đô thị và nông thôn với quy luật như sau: Hằng năm, có 50% dân số vùng nông thôn chuyển về vùng đô thị và đồng thời có 25% dân số vùng đô thị chuyển về vùng nông thôn sinh sống. Giả sử x,y tương ứng là số dân vùng nông thôn và vùng đô thị ở thời điểm ban đầu $(x,y>0)$.

a. Hỏi sau k năm dân số của vùng nông thôn và vùng đô thị là bao nhiêu?

b. Giả sử ban đầu số người sống ở nông thôn và đô thị là bằng nhau. Có thể đến lúc nào đó dân số của vùng đô thị vượt quá 80% tổng dân số của cả hai vùng không? Giải thích câu trả lời.

Giải

a. Gọi x_k, y_k tương ứng là số dân tại các vùng nông thôn và vùng đô thị sau k năm.

Theo giả thiết

$$\begin{cases} x_0=x \\ y_0=y \\ x_{k+1}=\frac{1}{2}x_k+\frac{1}{4}y_k & (1) \\ y_{k+1}=\frac{3}{4}y_k+\frac{1}{2}x_k & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (1) ta có $y_k=4x_{k+1}-2x_k$. Thay vào phương trình (2), ta được $4x_k-5x_{k-1}+x_{k-2}=0$ hay

$$x_k=\frac{5}{4}x_{k-1}-\frac{1}{4}x_{k-2}.$$

Khi đó, với $x_0=x$, $x_1=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y$ và phương trình đặc trưng $X^2-\frac{5}{4}X+\frac{1}{4}=0$ có 2 nghiệm phân biệt $t_1=\frac{1}{4}$, $t_2=1$, thì theo công thức (*) ta được:

$$x_k=\frac{t_2^k}{t_2-t_1}\left(x_1-t_1x_0\right)-\frac{t_1^k}{t_2-t_1}\left(x_1-t_2x_0\right)$$

$$=\frac{1^k}{1-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y-\frac{1}{4}x\right)-\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^k}{1-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y-x\right)$$

$$=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}y\right)-\frac{4}{3.4^k}\left(\frac{1}{4}y-\frac{1}{2}x\right)$$

$$=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{2}{3.4^k}y+\frac{2}{3.4^k}x.$$

Vậy

$$x_k=\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3.4^k}\right)x+\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3.4^k}\right)y.$$

Lại có $y_k=4x_{k+1}-2x_k$ nên suy ra

$$y_k=\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3.4^k}\right)x+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3.4^k}\right)y.$$

Kết luận dân số vùng nông thôn và đô thị sau k năm là

$$x_k=\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3.4^k}\right)x+\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3.4^k}\right)y$$

$$y_k=\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3.4^k}\right)x+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3.4^k}\right)y$$

b. Câu trả lời là không. Nếu $y_k=4x_k$ thì thay vào phương trình trên ta được

$$\left(2+\frac{10}{4^k}\right)x+\left(2-\frac{5}{4^k}\right)y=0$$

Vì $x,y>0$ nên điều này chỉ có thể xảy ra $k=0$ và $y=4x$, trái với giả thiết.

(Hoặc: theo giả thiết $x=y>0$ nên suy

[1] Năm 2018, lần đầu tiên Trường Đại học SPKT Vĩnh Long tham dự OLP và đạt HCB.

ra $\left(2+\frac{10}{4^k}\right)+\left(2-\frac{5}{4^k}\right)=0 \Leftrightarrow 4^{k+1}=-5$ vô nghiệm).

2.3. Các bài tập tương tự

Trong phần này chúng tôi đưa ra các bài tập tương tự từ các đề đề nghị của các tác giả, các trường đại học, cao đẳng, sau đó hướng dẫn giải theo công thức mà chúng tôi đã nêu ở trên.

Bài 1. (Xem [2, ví dụ 10.6])

Tính định thức

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & .. & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn giải.

Đặt

$$x_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & .. & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Bằng cách khai triển Laplace theo cột đầu tiên, ta được $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$.

Hơn nữa $x_1 = 1, x_2 = 2$.

Áp dụng công thức (*) với t_1, t_2 là nghiệm của phương trình $X^2 - X - 1 = 0$ ta được

$$x_n = \frac{2}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

Lưu ý: Người đọc có thể tìm hiểu về ý nghĩa thực tiễn của dãy Fibonacci để mở rộng bài toán.

Bài 2 (ĐH An Giang-2016).

Tính định thức cấp n của ma trận sau

$$D = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Hướng dẫn giải.

Đặt $x_n = \det D$.

Bằng cách khai triển Laplace theo hàng đầu tiên, ta được $x_n = 3x_{n-1} + 4x_{n-2}$.

Hơn nữa $x_1 = 3, x_2 = 13$.

Áp dụng công thức (*) với t_1, t_2 là nghiệm của phương trình $X^2 - 3X - 4 = 0$ ta được

$$\det D = x_n = \frac{4^{n+1} + (-1)^n}{5}.$$

Bài 3. (ĐH Khoa học Huế-2015).

Cho $A = (a_{ij})$ là ma trận vuông cấp n xác định bởi

$$a_{ij} = \begin{cases} 5 & \text{nếu } i = j \\ 2 & \text{nếu } i = j+1 \\ 3 & \text{nếu } i = j-1 \\ 0 & \text{nếu } i \notin \{j, j+1, j-1\} \end{cases}$$

a. Tìm định thức của ma trận A.

b. Giải hệ phương trình

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 10 \\ \vdots \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Hướng dẫn giải.

a. Ta có .

$$A=\begin{bmatrix}5&3&0&0&\dots&0&0\\2&5&3&0&\dots&0&0\\0&2&5&3&\dots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&\dots&5&3\\0&0&0&0&\dots&2&5\end{bmatrix}$$

Đặt $D_n=\det A$. Bằng cách khai triển Laplace theo cột đầu tiên, ta được $D_n=5D_{n-1}-6D_{n-2}$.

Hơn nữa $D_1=5, D_2=19$.

Áp dụng công thức (*) với t_1,t_2 là nghiệm của phương trình $X^2-5X+6=0$ ta được

$$\det A=D_n=3^{n+1}-2^{n+1}.$$

b. Vì $D_n=\det A\neq 0$ nên hệ có nghiệm duy nhất. Dễ thấy $x=(1;1;...;1)$ là một nghiệm của phương trình nên đây là nghiệm duy nhất cần tìm.

Bài 4. (ĐH Phạm Văn Đồng-2017).

Tính định thức

$$\begin{vmatrix}a+b&ab&0&\dots&0&0\\1&a+b&ab&0&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&\dots&0&1&a+b&ab\\0&\dots&\dots&0&1&a+b\end{vmatrix}$$

Hướng dẫn giải.

Đặt .

$$x_n=\begin{vmatrix}a+b&ab&0&\dots&0&0\\1&a+b&ab&0&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&\dots&0&1&a+b&ab\\0&\dots&\dots&0&1&a+b\end{vmatrix}$$

Bằng cách khai triển Laplace theo hàng đầu tiên, ta được $x_n=(a+b)x_{n-1}-abx_{n-2}$.

Hơn nữa $x_1=a+b, x_2=a^2+b^2+ab$.

Áp dụng công thức (*) với t_1,t_2 là nghiệm của phương trình $X^2-(a+b)X+ab=0$ ta được

$$x_n=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b},\ n\geq 3.$$

Bài 5. (ĐH Nha Trang-2019).

Cho dãy số $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ được xác định với: $x_1=5, x_2=19$ và $x_n(n\geq 3)$ là định thức cấp n cho bởi

$$x_n=\begin{vmatrix}5&3&0&0.\dots&0&0&0\\2&5&3&0&\dots&0&0&0\\0&2&5&3&\dots&0&0&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&0&\dots&5&3&0\\0&0&0&0&\dots&2&5&3\\0&0&0&0&\dots&0&2&5\end{vmatrix}$$

a. Tính x_5.

b. Chứng minh $x_n=5x_{n-1}-6x_{n-2}$ với mọi $n\geq 3$.

c. Chứng minh x_n-1 chia hết cho 4 với n lẻ.

Hướng dẫn giải.

a. Ta có

$$x_5=\begin{vmatrix}5&3&0&0&0\\2&5&3&0&0\\0&2&5&3&0\\0&0&2&5&3\\0&0&0&2&5\end{vmatrix}=665$$

b. Bằng cách khai triển Laplace theo hàng đầu tiên ta thu được $x_n=5x_{n-1}-6x_{n-2},\ n\geq 3$.

c. Ta có $x_1=5,\ x_2=19$.

Áp dụng công thức (*) với t_1,t_2 là nghiệm của phương trình $X^2-5X+6=0$ ta được

$$x_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}, \text{ với } n \geq 1.$$

Với n lẻ suy ra $n+1$ chẵn, nên

$$x_n - 1 = (4-1)^{2k} - 2^{2k} - 1$$

$$= -C_{2k}^1 4 + C_{2k}^2 4^2 - C_{2k}^3 4^3 + ... + 4^{2k} - 4^k.$$

3. KẾT LUẬN VÀ MỞ RỘNG

Bài toán tìm số hạng tổng quát của một dãy số có rất nhiều dạng và nhiều phương pháp giải, chẳng hạn, ngoài cách sử dụng phương pháp truy hồi như hướng dẫn trong kỷ yếu hay phương pháp đã nêu trong bài, ta có thể sử dụng phương pháp tính lũy thừa của ma trận (Xem [3])... Trong nhiều giáo trình Toán cao cấp (Đại số tuyến tính) không giới thiệu các phương pháp này và phạm vi bài viết này nhằm giới thiệu phương pháp chéo hóa ma trận để tính định thức được cho bởi công thức truy hồi trong trường hợp phương trình đặc trưng có hai nghiệm thực phân biệt. Từ đó, người đọc có thể nhanh chóng giải được những bài tập tương tự. Đối với các trường hợp phương trình đặc trưng bậc cao và có nghiệm phức, nghiệm bội thì việc tính toán cũng phức tạp hơn, vấn đề này chúng tôi xin đề cập trong những bài viết khác.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Lê Tuấn Hoa (2006), *Đại số tuyến tính qua các ví dụ và bài tập,* NXB ĐHQG Hà Nội.

[2] Hội toán học Việt Nam (2009-2022), *Kỷ yếu Olympic toán học sinh viên toàn quốc*, Hội toán học Việt Nam.

[3] Trường THPT chuyên Hưng Yên (2014), *Chuyên đề: Tìm số hạng tổng quát của dãy truy hồi tuyến tính cấp 2 để giải quyết một số bài toán về dãy số*, Trường THPT chuyên Hưng Yên.