

CHÉO HÓA TRỰC GIAO MA TRẬN VỚI GIÁ TRỊ RIÊNG NGUYÊN

ORTHOGONAL DIAGONALIZATION OF MATRICES WITH INTEGER EIGENVALUES

ThS. NGUYỄN THANH TOÀN^{1,a}, ThS. LƯU THỊ KIỀU HƯƠNG^{2,b}, ThS.
TRƯƠNG THỊ THÚY VÂN^{3,c}, TS. TRẦN HOÀI NGỌC NHÂN^{4,d}

^{1, 3, 4}Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Vĩnh Long

²Khoa Cơ bản, Trường Cao đẳng Vĩnh Long

^aEmail: toannt@vlute.edu.vn, ^bEmail: ltkhuong@vlcc.edu.vn,

^cEmail: vanttt@vlute.edu.vn, ^dEmail: tranhoaingocnhan@gmail.com

Nhận bài (received): 19/3/2022; Phản biện (revised): 28/03/2022; Chấp nhận (accepted): 12/4/2022

TÓM TẮT

Bài viết này tiếp nối chủ đề thiết lập ma trận có giá trị riêng nguyên. Chúng tôi trình bày phương pháp thiết lập ma trận với hệ số nguyên có thể chéo hóa trực giao được và dạng chéo cũng có hệ số nguyên. Nói cách khác, chúng tôi nêu thuật toán để tìm ma trận đối xứng (chéo hóa trực giao được) với hệ số nguyên có các giá trị riêng cũng là số nguyên.

Từ khóa: đại số tuyến tính, giá trị riêng nguyên, chéo hóa ma trận, chéo hóa trực giao.

ABSTRACT

This paper continues the topic of matrix with integer eigenvalues. We present a process to find matrices in which integer coefficients are orthogonally diagonalizable and the received diagonal matrix also has integer coefficients. In other words, we give a process to find symmetric matrices (orthogonal diagonalization) with integer coefficients whose eigenvalues are also integers.

Keywords: linear algebra, integer eigenvalues, matrix diagonalization, orthogonal diagonalization

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Đại số tuyến tính là một trong những nhánh trung tâm, giúp kết nối hầu hết các lĩnh vực của toán học và khoa học, kỹ thuật. Bên cạnh đó, đại số tuyến tính được ứng dụng rộng rãi trong thực tiễn vì nó cho phép mô hình hóa nhiều vấn đề hay gặp trong tự nhiên, xã hội và tính toán với các mô hình đó. Chính vì thế, môn học đại số tuyến tính được đưa vào giảng dạy ở đại học và là môn học bắt buộc cho các khối

ngành khoa học tự nhiên và khoa học kỹ thuật. Môn học này cũng được đưa vào nội dung thi Olympic toán học sinh viên toàn quốc được tổ chức hàng năm.

Trong nội dung của môn học đại số tuyến tính thì vấn đề chéo hóa ma trận là đóng vai trò quan trọng. Nếu một ma trận chéo hóa được thì ma trận đó sẽ đồng dạng với một ma trận dạng đường chéo, cho nên việc nghiên cứu các tính chất của ma trận đó sẽ dẫn đến bài toán đơn giản hơn là nghiên

cứu các tính chất (được bảo toàn qua quan hệ đồng dạng) của một ma trận chéo.

Ma trận vuông A gọi là *chéo hóa trực giao* được nếu tồn tại một ma trận đường chéo B và một ma trận trực giao P và sao cho $A = PBP^{-1}$. Ma trận vuông A chéo hóa trực giao được khi và chỉ khi A là ma trận đối xứng ([3, Định lý 5.4]. Quy trình chéo hóa trực giao ma trận đối xứng (xem [3, tr. 148]:

Bước 1: Xác định các giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ của A và tìm các vector riêng tương ứng $u_1, u_2, \dots, u_n$.

Bước 2: Trực giao hóa Gram-Schmidt hệ vector riêng $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ để được hệ vector trực chuẩn $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$.

Kết luận: Ma trận $P = \begin{bmatrix} [w_1] & [w_2] & \dots & [w_n] \end{bmatrix}$ mà các cột là các cột là các vector trực chuẩn ở Bước 2 và ma trận

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ thỏa mãn } P^T AP = D.$$

Nhận xét:

Chúng ta đã biết, nếu A là ma trận đối xứng với hệ số thực thì tất cả các giá trị riêng của A đều thực. Như vậy, khi giải phương trình đặc trưng ở Bước 1 có thể ra nghiệm vô tỉ hoặc hữu tỉ. Trong trường hợp giá trị riêng là số vô tỉ thì việc tìm vector riêng và quá trình trực giao hóa Gram-Schmidt ở Bước 2 sẽ cho ra các vector với hệ số rất phức tạp. Trong quá trình giảng dạy, nếu gặp trường hợp này thì người giảng sẽ rất mất thời gian, sa đà vào tính toán thủ công và làm giảm hẳn sự hứng thú đối với sinh viên. Như vậy, vấn đề đặt ra là làm sao người giảng viên có thể nhanh chóng cho ra ví dụ với đáp số đẹp để có thể kiểm soát được giờ giảng, đồng thời thu hút được sự chú ý của sinh viên vào nội dung trọng tâm

của quy trình chéo hóa trực giao ma trận. Trong bài viết này, chúng tôi cung cấp một phương pháp để ra đề bài cho dạng này với ma trận đối xứng có hệ số nguyên và các giá trị riêng cũng là số nguyên (khi đó dễ dàng suy ra ma trận chéo hóa trực giao).

2. NỘI DUNG

Để phù hợp với chương trình giảng dạy cho khối ngành kỹ thuật ở bậc đại học và cao đẳng, bài viết giới hạn với ma trận cấp 2, 3. Việc mở rộng cho các ma trận cấp cao hơn là có thể thực hiện được theo kỹ thuật tương tự.

2.1. Ma trận đối xứng cấp hai:

Đặt $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Ta chọn các giá trị a, b, c sao cho đa thức đặc trưng

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac - b^2) \end{aligned}$$

có nghiệm hữu tỉ.

Chẳng hạn, chọn $a - c, 2b, \Delta$ là các bộ 3 số Pitago nguyên tố (tức là đôi một nguyên tố cùng nhau). Khi đó $\Delta = (a - c)^2 + 4b^2$ là số chính phương lẻ nên các giá trị riêng $\lambda_{1,2} = \frac{(a + c) \pm \sqrt{(a - c)^2 + 4b^2}}{2}$ là số nguyên.

Ví dụ 1: Chọn $a = 3, b = 2, c = 6$ thì ma trận đối xứng $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ chéo hóa trực giao được với các giá trị riêng là $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 7$.

Ví dụ 2: Chọn $a = 2, b = 6, c = 7$ thì ma trận đối xứng $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ chéo hóa trực giao được với các giá trị riêng là $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 11$.

Ghi chú 3: Chúng tôi trích dẫn vào đây các bộ 3 số Pitago nguyên tố (a, b, c) với $a \leq b \leq c \leq 100$ để người đọc thuận tiện tham khảo:

(3, 4, 5)	(5, 12, 13)	(8, 15, 17)	(7, 24, 25)
(20, 21, 29)	(12, 35, 37)	(9, 40, 41)	(28, 45, 53)
(11, 60, 61)	(16, 63, 65)	(33, 56, 65)	(48, 55, 73)
(13, 84, 85)	(36, 77, 85)	(39, 80, 89)	(65, 72, 97)

2.2. Ma trận đối xứng cấp ba:

Trước hết, chúng tôi nhắc lại một kết quả hữu ích đã được biết rộng rãi, việc chứng minh có thể xem là bài tập phù hợp với trình độ của sinh viên.

Bổ đề 4: Ma trận

$$Q = \frac{1}{1+t+t^2} \begin{pmatrix} -t & t+t^2 & 1+t \\ 1+t & -t & t+t^2 \\ t+t^2 & 1+t & -t \end{pmatrix} := \frac{1}{1+t+t^2} P$$

trực giao với mọi $t \in \mathbb{R}$.

Tiếp theo, chúng tôi trình bày định lý sau đây làm công cụ cho phương pháp:

Định lý 5: Cho P_n là ma trận trực giao và ma trận đường chéo

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ với } \lambda_i \neq 0.$$

Khi đó $B = P.D.P^{-1}$ là ma trận đối xứng nhận λ_i làm các giá trị riêng, tức là ma trận P chéo hóa trực giao ma trận B . Hơn nữa, $mB = P.(mD).P^{-1}$ với mọi $m \neq 0$, tức là ma trận P chéo hóa trực giao ma trận mB và ma trận mB nhận $m\lambda_i$ làm các giá trị riêng.

Chứng minh.

Vì P là ma trận trực giao và D là ma trận đường chéo nên $P^{-1} = P^T$ và $D^T = D$. Khi đó

$$\begin{aligned} B^T &= (P.D.P^{-1})^T = (P^{-1})^T . D^T . P^T \\ &= (P^T)^T . D . P^{-1} = P.D.P^{-1} = B. \end{aligned}$$

Như vậy $B = P.D.P^{-1}$ là ma trận đối xứng.

Vì $P^{-1}.B.P = D$ nên ma trận P chéo hóa trực giao ma trận B . Mặt khác, B và D đồng dạng nên B nhận λ_i làm các giá trị riêng. Hơn nữa, vì $mB = P.(mD).P^{-1}$ với mọi $m \neq 0$ nên ma trận P chéo hóa trực giao ma trận mB và ma trận mB nhận $m\lambda_i$ làm các giá trị riêng.

Nhận xét 6: Chọn P_3 là một ma trận sao cho PP^T có dạng λI và chọn ma trận đường chéo

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \text{ với } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0.$$

Khi đó, áp dụng Định lý 5 thì tồn tại số nguyên m (chẳng hạn $m = \det P$) sao cho ma trận $m(PDP^{-1})$ đối xứng và có các giá trị riêng là $m\lambda_i$ nguyên.

Ví dụ 7. Từ Bổ đề 4, ta chọn $t = 2$ thì ta được ma trận

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 6 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

sao cho PP^T có dạng λI

Chọn

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

thì

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{23}{7} & \frac{6}{7} & 0 \\ \frac{6}{7} & \frac{30}{7} & -\frac{6}{7} \\ 0 & -\frac{6}{7} & \frac{17}{7} \end{pmatrix}$$

Khi đó ma trận đối xứng

$$A = 7.PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 23 & 6 & 0 \\ 6 & 30 & -6 \\ 0 & -6 & 17 \end{pmatrix}$$

chéo hóa trực giao được với các giá trị riêng là $\lambda_1 = 14, \lambda_2 = 21, \lambda_3 = 35$. Hơn nữa, ma trận chéo hóa trực giao ma trận A là

$$Q = \frac{1}{7}P = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 6 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Cuối cùng, chúng tôi trình bày kết quả sau đây, được suy ra chứng minh của [3, Định lý 1, Định lý 2] :

Định lý 8: Cho c, e, f, λ_1 thỏa mãn $c+e \neq 0, \lambda_1 \neq 0, c+e+f = \lambda_1$. Khi đó, ma trận

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \frac{c^2}{c+e} & \frac{-ce}{c+e} & c \\ \frac{-ce}{c+e} & \lambda_1 - \frac{e^2}{c+e} & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

có các giá trị riêng nguyên và nhận λ_1 làm giá trị riêng (kép).

Chứng minh.

Xét

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 - \frac{c^2}{c+e} - \lambda & \frac{-ce}{c+e} & c \\ \frac{-ce}{c+e} & \lambda_1 - \frac{e^2}{c+e} - \lambda & e \\ c & e & f - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{C3 \rightarrow C1+C2}{=} \det \begin{pmatrix} \lambda_1 - \frac{c^2}{c+e} - \lambda & \frac{-ce}{c+e} & \lambda_1 - \lambda \\ \frac{-ce}{c+e} & \lambda_1 - \frac{e^2}{c+e} - \lambda & \lambda_1 - \lambda \\ c & e & \lambda_1 - \lambda \end{pmatrix}$$

(vì $c+e+f = \lambda_1$)

$$= (\lambda_1 - \lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} \lambda_1 - \frac{c^2}{c+e} - \lambda & \frac{-ce}{c+e} & 1 \\ \frac{-ce}{c+e} & \lambda_1 - \frac{e^2}{c+e} - \lambda & 1 \\ c & e & 1 \end{pmatrix} :$$

$$= (\lambda_1 - \lambda) \cdot g(\lambda).$$

Ta thấy $g(\lambda_1) = 0$ (vì khi đó định thức có cột 1 và cột 2 tỉ lệ), từ đó $g(\lambda_1) \nmid \lambda_1 - \lambda_1$. Như vậy, λ_1 là nghiệm kép của $\det(A - \lambda I)$.

Ví dụ 9. Trong Định lý 8, ta chọn $c=3, e=-2, f=1$ và $\lambda_1=2$ thì ta được ma trận đối xứng

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 3 \\ 6 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

chéo hóa trực giao được với các giá trị riêng là $\lambda_1 = 2$ (kép), $\lambda_2 = -12$.

Ví dụ 10. Trong Định lý 8, ta chọn $c=3, e=-2, f=2$ và $\lambda_1=3$ thì ta được ma trận đối xứng

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 3 \\ 6 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

chéo hóa trực giao được với các giá trị riêng là $\lambda_1 = 3$ (kép), $\lambda_2 = -11$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Frederick P. Greenleaf and Sophie Marques (2019), *Linear algebra I*, American Mathematical Society.
- [2] Frederick P. Greenleaf and Sophie Marques (2020), *Linear algebra II*, American Mathematical Society.
- [3] Đinh Ngọc Thanh, Võ Phước Hậu (2019), “*Giáo trình Toán cao cấp A3*”, Nhà xuất bản GDVN.
- [4] Hội toán học Việt Nam (2009-2019), “*Kỷ yếu Olympic toán học sinh viên toàn quốc*”, Hội toán học Việt Nam.
- [5] Trương Thị Thúy Vân, Nguyễn Thanh Toàn, Trần Hoài Ngọc Nhân (2020), “*Thiết lập ma trận nhận các giá trị cho trước làm giá trị riêng*”, Thông tin khoa học số 3/2020, Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Vĩnh Long.

Thông tin phản biện: ThS. Nguyễn Thành Luân; TS. Nguyễn Trung Kiên