

SỰ TỒN TẠI NGHIỆM VÀ SUY GIẢM NĂNG LƯỢNG CỦA HỆ NHỚT-NHIỆT-ĐÀN HỒI

EXISTENCE OF SOLUTIONS AND ENERGY DECAY FOR PORO-THERMO-VISCOELASTIC SYSTEM

Phạm Minh Trí^a, Hồ Minh Trung^b, Nguyễn Thành Luân^c
Khoa Công nghệ Thông tin^{a,c}, Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Vĩnh Long
Khoa điện – Điện tử^b, Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Vĩnh Long
Email: tripm@vlute.edu.vn^a, trungmh@vlute.edu.vn^b, luannt@vlute.edu.vn^c

Nhận bài(Received): 23/10/2025; Phản biện (Reviewed):8/1/2026; Chấp nhận(Accepted):14/1/2026

TÓM TẮT

Bài báo xem xét hệ đàn hồi thấm nhiệt có nhớ trên miền bị chặn $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, mô tả tương tác giữa biến dạng u , áp suất lỗ rỗng p và nhiệt độ θ . Với hạt nhân nhớ $g(t)$ dương và đơn điệu giảm, chúng tôi chứng minh tồn tại duy nhất nghiệm yếu toàn cục bằng phương pháp Faedo-Galerkin và bất đẳng thức năng lượng. Trong trường hợp không có ngoại lực ($f = Q = 0$), năng lượng $E(t)$ suy giảm theo thời gian và thỏa bất đẳng thức

$$E(t) \leq E(0) \exp \left(-C \int_0^t \xi(\tau) d\tau \right), t \geq 0$$

mô tả cơ chế general decay của hệ.

Từ khóa: Mô hình đàn hồi-thấm-nhiệt có nhớ; nghiệm yếu; bất đẳng thức năng lượng; suy giảm năng lượng; phương pháp Faedo-Galerkin; hạt nhân nhớ.

ABSTRACT

This paper investigates a poro-thermo-viscoelastic system defined on a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, describing the interaction among the displacement field u , the pore pressure p , and the temperature θ . Assuming that the memory kernel $g(t)$ is positive and monotonically decreasing, we establish the global existence and uniqueness of a weak solution utilizing the Faedo-Galerkin approximation and energy inequality techniques. In the absence of external forces ($f = Q = 0$), the energy $E(t)$ decreases over time and satisfies the inequality

$$E(t) \leq E(0) \exp \left(-C \int_0^t \xi(\tau) d\tau \right), t \geq 0$$

which characterizes the general decay of the system.

Keywords: Poro-thermo-viscoelastic system; memory kernel; weak solution; energy decay; Faedo-Galerkin method.

1. Giới thiệu

Trên miền $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ đóng, bị chặn, với $t > 0$, xét hệ phương trình ghép cơ-thấm-nhiệt có nhớ

$$\begin{cases} \rho u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s)(-\Delta)u(s)ds + \alpha \nabla p + \beta \nabla \theta = f(x,t), \\ s_0 p_t - \kappa \Delta p + \alpha \nabla \cdot u_t = 0, \\ c \theta_t - k \Delta \theta + \beta \nabla \cdot u_t = Q(x,t), \end{cases} \quad \#(1.1)$$

với điều kiện ban đầu

$$u(\cdot, 0) = u_0, u_t(\cdot, 0) = u_1, p(\cdot, 0) = p_0, \theta(\cdot, 0) = \theta_0,$$

và điều kiện biên Dirichlet thuần nhất $u = p = \theta = 0$ trên $\partial\Omega$. Cho miền không gian $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là bị chặn và có biên trơn $\partial\Omega$. Hằng số vật lý: $\rho, s_0, \kappa, c, k > 0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Nguồn $f, Q \in L^2_{\text{loc}}(0, \infty; H^{-1}(\Omega))$.

Dữ liệu ban đầu

$$(u_0, u_1, p_0, \theta_0) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

Điều kiện (G) nhân nhớ $g: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ thỏa

- i) g khả vi, không tăng: $g'(t) \leq 0$,
- ii) $1 - \int_0^\infty g(s)ds = \mu_0 > 0$,
- iii) $g'(t) \leq -\sigma g(t)$ với $\sigma > 0$.

Hệ (1.1) mô tả sự tương tác giữa ba trường vật lý:

- $u(x, t)$ chuyển động cơ học (đàn hồi nhớ),
- $p(x, t)$ áp suất thẩm trong môi trường xốp,
- $\theta(x, t)$ trường nhiệt độ.

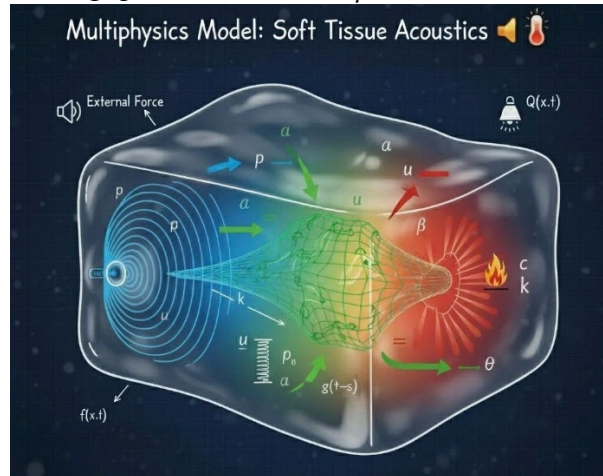
Thành phần thứ nhất là phương trình hyperbolic có nhân nhớ, phản ánh hiệu ứng nhớ đàn hồi qua tích phân chứa $g(t-s)$; phương trình có dạng tổng quát

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s)(-\Delta)u(s)ds = f(x, t)$$

Hai phương trình còn lại là phương trình parabolic, có dạng tổng quát

$$v_t - \Delta v = g(x, t)$$

mô tả khuếch tán áp suất (theo định luật Darcy) và truyền nhiệt (theo định luật Fourier), đồng thời ghép với biến dạng cơ học thông qua các hệ số α và β .



Hình 1: Mô hình đa vật lý: sóng âm trong mô mềm.

Mô hình này có nhiều ứng dụng trong địa cơ học, vật liệu xốp chịu nhiệt, và mô phỏng các môi trường đa vật lý như đất, bê tông hoặc mô sinh học [3]. Về mặt toán học, đây là sự kết hợp của các mô hình poroelasticity, thermoelasticity và viscoelasticity with memory, tạo thành một hệ động

lực có nhớ ba thành phần, có thể được dùng làm cơ sở cho việc nghiên cứu tồn tại, ổn định và suy giảm năng lượng của nghiệm [1, 5, 6].

Trong vài thập niên gần đây, các mô hình vật liệu có tính đàn hồi-nhớ (viscoelastic) và thấm (poroelastic) đã thu hút sự quan tâm rộng rãi trong cơ học và toán học ứng dụng, do khả năng mô tả chính xác ứng xử động lực học của các môi trường phức tạp như vật liệu composite, sinh học, hoặc đất bão hòa chất lỏng [2, 4]. Khi xét thêm hiệu ứng nhiệt, ta thu được mô hình đàn hồi-thấm-nhiệt có nhớ (poro-thermo-viscoelastic model), trong đó ba trường vật lý - biến dạng cơ học, áp suất lỗ rỗng và nhiệt độ - tương tác chặt chẽ thông qua các tham số ghép cơ-thấm-nhiệt [3, 5].

Từ góc độ toán học, bài toán này dẫn đến một hệ phương trình đạo hàm riêng phi tuyến, có nhân nhớ, với cấu trúc dạng tích phân trong thời gian. Việc phân tích tính đúng đắn (well-posedness) và ổn định của hệ là vấn đề cơ bản nhưng không đơn giản, do tác động kết hợp của các cơ chế nhớ và khuếch tán. Nhiều công trình trước đây chỉ xét riêng hệ đàn hồi có nhớ hoặc hệ poroelastic cổ điển không có hiệu ứng nhiệt [6]

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s)(-\Delta)u(s)ds = 0$$

và trong [7, 8]

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds + g_1(u_t, u, v) = f_1(u, v), \\ v_{tt} - \Delta v + \int_0^t g(t-s)\Delta v(s)ds + g_2(v_t, u, v) = f_2(u, v), \end{cases}$$

trong khi mô hình ghép cơ-nhiệt-thấm có nhớ vẫn còn ít được khai thác trong các nghiên cứu gần đây.

Trong bài báo này, chúng tôi xem xét hệ poro-thermo-viscoelastic có nhân nhớ $g(t)$ dương, đơn điệu giảm, trên miền bị chặn $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Bằng phương pháp xấp xỉ FaedoGalerkin và bất đẳng thức năng lượng, chúng tôi chứng minh sự tồn tại duy nhất nghiệm yếu toàn cục. Tiếp đó, khi không có ngoại lực, năng lượng của nghiệm được chứng minh là giảm theo thời gian, và chúng tôi xác định được tốc độ suy giảm năng lượng dưới hai dạng: suy giảm mũ và suy giảm đa thức, phụ thuộc vào hành vi của hạt nhân nhớ $g(t)$.

Kết quả này mở rộng nhiều công trình trước đây về hệ viscoelastic hoặc thermoelastic có nhớ sang trường hợp hệ ghép ba trường vật lý (cơ-thấm-nhiệt), qua đó cung cấp một khuôn khổ phân tích tổng quát cho việc nghiên cứu ổn định và điều khiển của các vật liệu phức hợp có tính nhớ.

2. Các kết quả chính

2.1. Tồn tại duy nhất nghiệm (Well-posedness)

Định lý 2.1. Dưới các giả thiết trên, phương trình 1.1 tồn tại duy nhất nghiệm yếu

$$u \in H_{\text{loc}}^1(0, \infty; H_0^1(\Omega)), u_t \in L_{\text{loc}}^2(0, \infty; L^2(\Omega)) \\ p, \theta \in L_{\text{loc}}^2(0, \infty; H_0^1(\Omega)) \cap H_{\text{loc}}^1(0, \infty; H^{-1}(\Omega))$$

Năng lượng tổng

$$E(t) = \frac{1}{2} \left(\rho \|u_t\|^2 + \mu_0 \|\nabla u\|^2 + s_0 \|p\|^2 + c \|\theta\|^2 + \int_0^t g(t-s) \|\nabla u(t) - \nabla u(s)\|^2 ds \right)$$

Bất đẳng thức năng lượng

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq -\kappa \|\nabla p\|^2 - k \|\nabla \theta\|^2 - \frac{1}{2} \int_0^t (-g'(t-s)) \|\nabla u(t) - \nabla u(s)\|^2 ds$$

$$+ \langle f, u_t \rangle + \langle Q, \theta \rangle \quad (2.1)$$

Chứng minh.

Bước 1. Xây dựng dãy xấp xỉ Faedo-Galerkin. Chọn $\{\phi_j\}_{j \geq 1}$ là hệ trực giao của các hàm riêng của toán tử Dirichlet $-\Delta$ trên $H_0^1(\Omega)$. Đặt $V_m = \text{span}\{\phi_1, \dots, \phi_m\}$ và tìm nghiệm xấp xỉ

$$u^m = \sum_{j=1}^m a_j^m(t) \phi_j, \quad p^m = \sum_{j=1}^m b_j^m(t) \phi_j, \quad \theta^m = \sum_{j=1}^m c_j^m(t) \phi_j$$

sao cho với mọi $v, q, r \in V_m$, ta có

$$\begin{cases} \langle \rho u_{tt}^m, v \rangle + \langle \nabla u^m, \nabla v \rangle + \int_0^t g(t-s) \langle \nabla u^m(s), \nabla v \rangle ds + \alpha \langle \nabla p^m, v \rangle + \beta \langle \nabla \theta^m, v \rangle = \langle f, v \rangle \\ \langle s_0 p_t^m, q \rangle + \kappa \langle \nabla p^m, \nabla q \rangle - \alpha \langle \nabla \cdot u_t^m, q \rangle = 0 \\ \langle c \theta_t^m, r \rangle + k \langle \nabla \theta^m, \nabla r \rangle - \beta \langle \nabla \cdot u_t^m, r \rangle = \langle Q, r \rangle \end{cases}$$

Với điều kiện ban đầu $(u^m(0), u_t^m(0), p^m(0), \theta^m(0))$ là các xấp xỉ của $(u_0, u_1, p_0, \theta_0)$ trong V_m . Hệ này là một hệ ODE tron hữu hạn chiều nên có nghiệm cục bộ.

Bước 2. Ước lượng năng lượng cho hệ xấp xỉ. Lấy tích vô hướng L^2 lần lượt của ba phương trình với u_t^m, p^m, θ^m rồi cộng lại, ta thu được

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \rho \|u_t^m\|^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \|\nabla u^m\|^2 + \frac{1}{2} s_0 \|p^m\|^2 + \frac{1}{2} c \|\theta^m\|^2 + \frac{1}{2} \int_0^t g(t-s) \|\nabla u^m(t) - \nabla u^m(s)\|^2 ds \right] \\ &= -\kappa \|\nabla p^m\|^2 - k \|\nabla \theta^m\|^2 - \frac{1}{2} \int_0^t (-g'(t-s)) \|\nabla u^m(t) - \nabla u^m(s)\|^2 ds + \langle f, u_t^m \rangle + \langle Q, \theta^m \rangle \end{aligned}$$

Vì $g'(t) \leq 0$ nên hạng tử thứ ba bên phải không dương, do đó

$$\frac{d}{dt} E_m(t) \leq \langle f, u_t^m \rangle + \langle Q, \theta^m \rangle$$

với năng lượng

$$E_m(t) = \frac{1}{2} \left(\rho \|u_t^m\|^2 + \mu_0 \|\nabla u^m\|^2 + s_0 \|p^m\|^2 + c \|\theta^m\|^2 + \int_0^t g(t-s) \|\nabla u^m(t) - \nabla u^m(s)\|^2 ds \right).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và Young

$$|\langle f, u_t^m \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|u_t^m\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|f\|_{H^{-1}}^2, \quad |\langle Q, \theta^m \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|\theta^m\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|Q\|_{H^{-1}}^2,$$

suy ra

$$\frac{d}{dt} E_m(t) \leq C \left(E_m(t) + \|f\|_{H^{-1}}^2 + \|Q\|_{H^{-1}}^2 \right)$$

Nhờ bất đẳng thức Grönwall, ta có ước lượng đồng nhất theo m :

$$\sup_{t \in [0, T]} E_m(t) \leq C_T$$

Bước 3. Qua giới hạn $m \rightarrow \infty$. Từ ước lượng trên, ta có các chặn đều

$$u^m \rightharpoonup u \text{ yếu }^* \text{ trong } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)),$$

$$u_t^m \rightharpoonup u_t \text{ yếu trong } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$p^m, \theta^m \rightharpoonup p, \theta \text{ yếu trong } L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Nhờ bổ đề Aubin-Lions, có thể trích một dãy con hội tụ mạnh trong $L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Khi đó, ta có thể chuyển giới hạn trong tất cả các hạng tử tuyến tính và cả phần nhớ $\int_0^t g(t-s) \Delta u^m(s) ds$ (trong

không gian $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$). Giới hạn (u,p,θ) nhận được thoả hệ yếu và điều kiện ban đầu-biên theo nghĩa yếu.

Bước 4. Duy nhất nghiệm yếu. Giả sử tồn tại hai nghiệm yếu (u_1,p_1,θ_1) và (u_2,p_2,θ_2) với cùng dữ liệu. Đặt

$$\tilde{u} = u_1 - u_2, \tilde{p} = p_1 - p_2, \tilde{\theta} = \theta_1 - \theta_2.$$

Khi đó $(\tilde{u},\tilde{p},\tilde{\theta})$ thoả hệ tương tự với $f = Q = 0$ và điều kiện ban đầu bằng 0. Tính toán năng lượng như trên cho hệ sai biệt, ta được

$$\frac{d}{dt} \tilde{E}(t) \leq 0, \tilde{E}(0) = 0$$

nên $\tilde{E}(t) \equiv 0, \forall t > 0$, do đó nghiệm yếu là duy nhất.

Bước 5. Bất đẳng thức năng lượng. Từ công thức năng lượng trên, với nghiệm yếu (u^m,p^m,θ^m) ta có

$$\frac{d}{dt} E_m(t) = -\kappa \|\nabla p^m\|^2 - k \|\nabla \theta^m\|^2 - \frac{1}{2} \int_0^t (-g'(t-s)) \|\nabla u^m(t) - \nabla u^m(s)\|^2 ds + \langle f, u_t^m \rangle + \langle Q, \theta^m \rangle,$$

suy ra

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) &\leq -\kappa \|\nabla p\|^2 - k \|\nabla \theta\|^2 - \frac{1}{2} \int_0^t (-g'(t-s)) \|\nabla u(t) - \nabla u(s)\|^2 ds \\ &\quad + \langle f, u_t \rangle + \langle Q, \theta \rangle. \end{aligned}$$

2.2. Năng lượng suy giảm tổng quát (General decay)

Đặt

$$J(t) := \int_0^t g(t-s) \|\nabla u(t) - \nabla u(s)\|^2 ds$$

Nhắc lại giả thiết (G) : tồn tại hàm không tăng $\xi: [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ sao cho $g'(t) \leq -\xi(t)g(t)$, với $t \geq 0$. Đặt $\mu(\tau) := -g'(\tau) \geq 0$ và $\eta(t) := \int_0^t g(s)ds$.

Bổ đề 2.2 (So sánh μ và g). Với mọi hàm đo được $\Phi(t, \cdot) \geq 0$ ta có

$$\int_0^t \mu(t-s) \Phi(t,s) ds \geq \xi(t) \int_0^t g(t-s) \Phi(t,s) ds \quad (2.2)$$

Chứng minh. Từ (G) suy ra với mọi $\tau \geq 0$: $\mu(\tau) = -g'(\tau) \geq \xi(\tau)g(\tau)$. Do ξ không tăng nên $\xi(t) \leq \xi(t-s)$ với $s \in [0, t]$. Vì thế

$$\mu(t-s) \geq \xi(t-s)g(t-s) \geq \xi(t)g(t-s)$$

Nhân hai vế với $\Phi(t,s) \geq 0$ rồi tích phân theo $s \in (0, t)$ thu được (2.2).

Hệ quả 2.3. Áp dụng (2.2) cho $\Phi(t,s) = \|\nabla u(t) - \nabla u(s)\|^2$ ta được

$$\int_0^t \mu(t-s) \|\nabla u(t) - \nabla u(s)\|^2 ds \geq \xi(t) J(t) \quad (2.3)$$

Bổ đề 2.4 (Tương đương chuẩn có nhớ). Tồn tại hằng số $C_* > 0$ (chỉ phụ thuộc ρ, s_0, c) sao cho với mọi $t \geq 0$

$$C_* \left(\|u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|p\|^2 + \|\theta\|^2 + J(t) \right) \leq 2E(t) \quad (2.4)$$

Chứng minh. Bất đẳng thức hiển nhiên vì mọi hạng trong $2E(t)$ là không âm, do đó

$$2E(t) \geq \min\{\rho, 1, s_0, c, 1\} \left(\|u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|p\|^2 + \|\theta\|^2 + J(t) \right),$$

nên $C_* = \min\{\rho, \mu_0, s_0, c, 1\}$.

Định lý 2.5. Từ các giả thuyết (G), các điều kiện đầu và điều kiện biên, trong trường hợp không có ngoại lực $f = Q = 0$, nghiệm yếu (u, p, θ) của hệ (1.1) thỏa ước lượng suy giảm năng lượng tổng quát

$$E(t) \leq E(0) \exp \left(-C \int_0^t \xi(\tau) d\tau \right), t \geq 0 \quad (2.5)$$

trong đó $C > 0$ là hằng số chỉ phụ thuộc vào các tham số vật lý ρ, s_0, c, κ, k và miền Ω .

- Nếu $\xi(t) \equiv \sigma > 0$ thì $E(t) \leq E(0)e^{-C\sigma t}$;
- Nếu $\xi(t) \sim \frac{r}{1+t}$ với $r > 1$ thì $E(t) \leq C(1+t)^{-Cr}$.

Chứng minh. Từ (2.1), kết hợp (2.3) thu được

$$E'(t) \leq -\kappa \|\nabla p\|^2 - k \|\nabla \theta\|^2 - \frac{1}{2} \xi(t) J(t). \quad (2.6)$$

Đặt

$$A(t) := \|p(t)\|^2 + \|\theta(t)\|^2, B(t) := J(t).$$

Nhờ bất đẳng thức Poincaré có $\|\nabla p\|^2 \geq \lambda_P \|p\|^2, \|\nabla \theta\|^2 \geq \lambda_P \|\theta\|^2$, nên

$$E'(t) \leq -c_1 A(t) - c_2 \xi(t) B(t), c_1 := \lambda_P \min\{\kappa, k\}, c_2 := \frac{1}{2}. \quad (2.7)$$

Suy ra

$$E'(t) \leq -\min\{c_1, c_2 \xi(t)\} (A(t) + B(t)) \quad (2.8)$$

Từ Bổ đề 2.4 suy ra với $m := \min\left\{\frac{\rho}{2}, \frac{s_0}{2}, \frac{c}{2}, \frac{1}{2}\right\} > 0$,

$$E(t) \geq m(A(t) + B(t)) \implies A(t) + B(t) \leq \frac{1}{m} E(t). \quad (2.9)$$

Mặt khác, vì ξ không tăng nên $\xi(t) \leq \xi(0)$ và

$$\min\{c_1, c_2 \xi(t)\} \geq \xi(t) \min\left\{\frac{c_1}{\xi(0)}, c_2\right\}. \quad (2.10)$$

Thế (2.9)-(2.10) vào (2.8) cho ta

$$E'(t) \leq -\xi(t) \min\left\{\frac{c_1}{\xi(0)}, c_2\right\} \frac{1}{m} E(t)$$

Đặt

$$C := \frac{1}{m} \min\left\{\frac{c_1}{\xi(0)}, c_2\right\} > 0 \quad (2.11)$$

thu được bất đẳng thức

$$E'(t) \leq -C \xi(t) E(t) \quad (2.12)$$

Từ (2.12) và bất đẳng thức Grönwall, ta có

$$E(t) \leq E(0) \exp \left(-C \int_0^t \xi(\tau) d\tau \right), t \geq 0 \quad (2.13)$$

Các trường hợp riêng:

- Suy giảm mũ: nếu $g'(t) \leq -\sigma g(t)$ với $\sigma > 0$ (tức $\xi(t) \equiv \sigma$) thì $E(t) \leq E(0)e^{-C\sigma t}$.
- Suy giảm đa thức: nếu $g(t) \sim C_0(1+t)^{-r}$ với $r > 1$ thì $\xi(t) \sim r/(1+t)$ và $E(t) \leq E(0)(1+t)^{-Cr}$.
- Suy giảm tổng quát: đúng theo (2.13), tốc độ do $\int_0^t \xi$ chi phối.

3. Kết luận

Bài báo nghiên cứu hệ đàn hồi-thấm-nhiệt có nhớ, mô tả sự tương tác giữa biến dạng cơ học, áp suất lỗ rỗng và trường nhiệt độ. Nhóm tác giả đã chứng minh tồn tại và duy nhất nghiệm yếu toàn cục bằng phương pháp Faedo-Galerkin kết hợp bất đẳng thức năng lượng. Trong trường

hợp không có ngoại lực, bài báo xác lập cơ chế suy giảm năng lượng tổng quát (general decay) của nghiệm. Tốc độ suy giảm được mô tả dưới các dạng suy giảm mũ, suy giảm đa thức, và suy giảm tổng quát, tùy thuộc vào hành vi của hạt nhân nhớ. Kết quả thu được mở rộng các nghiên cứu cổ điển về hệ viscoelastic và thermoelastic sang mô hình đa trường vật lý phức tạp hơn. Bài báo đồng thời đưa ra một khuôn khổ phân tích thống nhất cho các hệ phương trình đạo hàm riêng có nhớ ghép nhiều cơ chế vật lý. Các kết quả lý thuyết có thể ứng dụng trong địa cơ học, vật liệu xốp chịu nhiệt và mô phỏng môi trường đa vật lý. Những phân tích này cũng hỗ trợ việc xây dựng thuật toán mô phỏng ổn định và nghiên cứu ổn định lâu dài cho hệ. Tổng thể, bài báo đóng góp một bước tiến mới trong hiểu biết toán học về các hệ cơ-thẩm-nhiệt có nhớ.

Tài liệu tham khảo

- [1] Ammari, K., Salhi, M., & Shel, F. (2024), Well-posedness and stability of abstract thermoelastic delayed systems, arxiv, pp. 1-26.
- [2] Al-Mahdi, A. M., & Al-Gharabli, M. M. (2019), New general decay results in an infinite memory viscoelastic problem with nonlinear damping, Boundary Value Problems, pp. 1-15.
- [3] Cai, M., Li, J., Li, Z., & Liu, Q. (2025), Efficient Iterative Decoupling Methods for Thermo-Poroelasticity Based on a Four-Field Formulation, Computers & Mathematics with Applications, pp. 139-160.
- [4] Cavalcanti, M. M., Domingos Cavalcanti, V. N., & Soriano, J. A. (2002), Exponential decay for the solution of semilinear viscoelastic wave equations with localized damping, Electronic Journal of Differential Equations, pp. 1-14.
- [5] Laribi, I., Krelifa, A., Boukabcha, H., Ouchenane, D., Boulaaras, S., Zitouni, S., & Jan, R. (2024), Exponential stability and numerical results of a thermoelastic Timoshenko system with diffusion effect, memory and distributed delay terms, Boundary Value Problems, pp. 1-54.
- [6] Messaoudi, S. A. (2008), General decay of solutions of a viscoelastic equation. Journal of Mathematical Analysis and Applications, pp. 1457-1467.
- [7] Peyravi, A. (2017), General decay and blow up of solutions for a system of viscoelastic wave equations with nonlinear boundary source terms, Journal of Mathematical Analysis and Applications, pp. 1056-1076.
- [8] Wu, S. T. (2013), General decay of solutions for a nonlinear system of viscoelastic wave equations with degenerate damping and source terms, Journal of Mathematical Analysis and Applications, pp. 34-48.