

BÀI TOÁN NHIỆT NGƯỢC THỜI GIAN THUẦN NHẤT TRÊN ĐOẠN BỊ CHẶN

THE PROBLEM OF HOMOGENEOUS BACKWARD HEAT CONDUCTION ON A BOUNDED INTERVAL

PHẠM MINH TRÍ, NGUYỄN THÀNH NHÂN

Trường Đại học SPKT Vĩnh Long

Email: tripm@vlute.edu.vn

Nhận bài (Received): 04/4/2022; Phản biện (Reviewed): 27/5/2022; Chấp nhận (Accepted): 21/7/2022

TÓM TẮT:

Bài toán nhiệt ngược thời gian thuần nhất trên đoạn bị chặn là bài toán không chỉnh. Bài toán liên quan đến phương trình $Ax = y$. Với dữ liệu y , chúng ta tìm $x = A^{-1}y$. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán có thể không đạt được. Trong trường hợp tồn tại, nghiệm của bài toán cũng không ổn định vì toán tử A^{-1} không liên tục. Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu bài toán không chỉnh và một phương pháp chỉnh hóa tương ứng. Trong phần sau, chúng tôi sẽ sử dụng phương pháp Fourier để thiết lập dạng nghiệm yếu. Hơn nữa, phương pháp tựa biên được sử dụng để xây dựng nghiệm chỉnh hóa.

Từ khóa: Bài toán ngược thời gian.

ABSTRACT:

The problem of homogeneous backward heat conduction on a bounded interval is an ill-posed problem. The problem is concerned with the equation $Ax = y$. For the given data y , we find $x = A^{-1}y$. The existence and uniqueness of the solution to the problem may not be obtained. In case of existence, the solution to the problem is also unstable because the operator A^{-1} is not continuous. In this paper, we study the ill-posedness of the problem and a regularization is given. In the following parts, the Fourier method is used to obtain the weak form of solution. Moreover, the method of quasi-boundary value is used to construct the regularized solution.

Keywords: Quasi-boundary value, backward heat equations.

I. Bài toán không chỉnh

Bài toán ngược thời gian hay còn gọi là bài toán giá trị cuối: $u_t + Au = 0, u(T) = f$ trong đó A là một toán tử dương và tự liên hợp, được biết là một bài toán không chỉnh. Bài toán trên đã được khảo sát và chỉnh hóa bằng nhiều phương pháp trong đó có hai phương pháp cơ bản được sử dụng nhiều là phương pháp tựa khả nghịch [Ewing, (1975)] và phương pháp tựa biên [Colton, (1979); Clark, (1994); Yildiz,

(2000); Denche, (2005); Phúc, (2006); Tuấn, (2009)]. Trong trường hợp toán tử A là toán tử Laplace, với u là phân bố nhiệt độ trên thanh bị chặn, cùng với điều kiện biên ta có bài toán:

$$\begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), & 0 < x < 1, 0 < t < 1 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & 0 < t < 1 \\ u(x, 1) = f(x), & 0 < x < 1 \end{cases} \quad (I)$$

tìm $u(x, 0) = g(x)$ từ dữ liệu $f_\delta(x)$

với $\|f_\delta - f\|_2 \leq \delta$. Các ký hiệu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_t, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx}, \|f\|_2^2 = \int_0^1 f^2(x) dx.$$

Dựa trên công trình của Clark và Oppenheimer năm 1994 tác giả chỉnh hóa bài toán (I). Do tính chất của toán tử Laplace, ta có các chứng minh cụ thể không thông qua lý thuyết nửa nhóm của hai ông. Cụ thể là chỉnh hoá bài toán được giới thiệu ở phần tiếp theo như sau.

Giả sử $\varphi \in C^2(0,1)$, lấy tích vô hướng trong $L^2(0,1)$, ta được

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_t(x,t)\varphi(x)dx &= \int_0^1 u_{xx}(x,t)\varphi(x)dx \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \int_0^1 u(x,t)\varphi(x)dx &= [u_x(x,t)\varphi(x) - u(x,t)\varphi_x(x)]_0^1 + \\ &\quad \int_0^1 u(x,t)\varphi_{xx}(x)dx \end{aligned} \quad (1)$$

Tìm hàm φ thỏa

$$\begin{cases} \varphi_{xx}(x) = -\lambda\varphi(x) \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \end{cases}$$

Ta được $\lambda_n = n^2\pi^2, \varphi_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin n\pi x$. Khi đó (1) tương đương

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \int_0^1 u(x,t)\varphi_n(x)dx = -n^2\pi^2 \int_0^1 u(x,t)\varphi_n(x)dx$$

Đặt

$$u_n(t) = \langle u(x,t), \varphi_n(x) \rangle = \int_0^1 u(x,t)\varphi_n(x)dx$$

ta có

$$\frac{d}{dt} u_n(t) = -n^2\pi^2 u_n(t)$$

$$\Rightarrow u_n(t) = u_n(0)e^{-n^2\pi^2 t} = \int_0^1 g(y)\varphi_n(y)dy e^{-n^2\pi^2 t}$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle u(x,t), \varphi_n(x) \rangle}{\langle \varphi_n(x), \varphi_n(x) \rangle} \varphi_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 g(y)\varphi_n(y)dy e^{-n^2\pi^2 t} \varphi_n(x) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow u(x,t) = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x \sin n\pi y \right) g(y)dy$$

Suy ra

$$\begin{aligned} f(x) &= u(x,1) \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-n^2\pi^2} \sin n\pi x \sin n\pi y \right) g(y)dy \end{aligned} \quad (2)$$

Đặt

$$k(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-n^2\pi^2} \sin n\pi x \sin n\pi y \quad (3)$$

thì $k(x,y)$ là nhân nhiệt của phương trình tích phân loại 1 ([7], (2005) trang 221)

$$f(x) = \int_0^1 k(x,y)g(y)dy \quad (4)$$

Định lý 1. Bài toán (I) là bài toán không chỉnh.

Chứng minh

Thật vậy, chuỗi (3) hội tụ đều nên nhân k liên tục. Phương trình (4) viết dạng toán tử $Ag = f$. Khi đó A là toán tử compact có toán tử ngược A^{-1} không bị chặn nên bài toán ngược là không chỉnh [10]. Hơn nữa nghiệm không phụ thuộc liên tục vào dữ liệu. Cụ thể, xét phương trình nhiệt

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), & 0 < x < 1, 0 < t < 1 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & 0 < t < 1 \\ u(x,1) = f(x) = e^{-\pi^2} \sin \pi x, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

có nghiệm chính xác

$$u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x \Rightarrow u(x,0) = \sin \pi x.$$

Với dữ liệu nhiễu

$$u(x,1) = f_\delta(x) = e^{-\pi^2} \sin \pi x + \frac{1}{n} \sin n\pi x.$$

Khi đó nghiệm tương ứng

$$u_{\delta}(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x + \frac{1}{n} e^{-n^2 \pi^2 (t-1)} \sin n \pi x$$

$$\Rightarrow u_{\delta}(x, 0) = \sin \pi x + \frac{1}{n} e^{n^2 \pi^2} \sin n \pi x.$$

Ta có

$$\|f - f_{\delta}\|_2^2 = \int_0^1 \frac{1}{n^2} \sin^2 n \pi x dx = \frac{1}{2n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Nhưng

$$\|u(., 0) - u_{\delta}(., 0)\|_2^2 = \int_0^1 \frac{1}{n^2} e^{2n^2 \pi^2} \sin^2 n \pi x dx$$

$$= \frac{e^{2n^2 \pi^2}}{2n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

2. Phương pháp chỉnh hóa

Từ (2) lấy tích vô hướng hai vế

$$f_n = u_n(x, 1) = e^{-n^2 \pi^2} g_n \Leftrightarrow g_n = e^{n^2 \pi^2} f_n.$$

Ta có khai triển hình thức

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{1}{\sqrt{2}} \sin n \pi x e^{n^2 \pi^2} \quad (5)$$

f_n là hệ số Fourier của hàm f . Nhân tử $e^{n^2 \pi^2}$ trong chuỗi (5) gây ra bất ổn khi n lớn. Ta tìm cách thay thế nhân tử này. Xét bài toán chỉnh hóa [3]

$$\begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), & 0 < x < 1, 0 < t < 1 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & 0 < t < 1 \\ \alpha u(x, 0) + u(x, 1) = f(x), & 0 < x < 1 \\ u(x, 0) = g_{\alpha}(x) & 0 < x < 1 \end{cases} \quad (II)$$

Định lý 2. Bài toán (II) là bài toán đặt tốt (well-posed).

Chứng minh

Giả sử $\varphi \in C^2(0, 1)$, lấy tích vô hướng trong $L^2(0, 1)$, ta được

$$\int_0^1 u_t(x, t) \varphi(x) dx = \int_0^1 u_{xx}(x, t) \varphi(x) dx$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \int_0^1 u(x, t) \varphi(x) dx = \int_0^1 u(x, t) \varphi_{xx}(x) dx. \quad (6)$$

Tìm hàm φ thỏa

$$\begin{cases} \varphi_{xx}(x) = -\lambda \varphi(x) \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \end{cases}$$

Ta được $\lambda_n = n^2 \pi^2, \varphi_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin n \pi x$.
Khi đó (6) tương đương

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 u(x, t) \varphi_n(x) dx = -n^2 \pi^2 \int_0^1 u(x, t) \varphi_n(x) dx.$$

$$\text{Đặt } u_n(t) = \int_0^1 u(x, t) \varphi_n(x) dx$$

ta có

$$\frac{d}{dt} u_n(t) = -n^2 \pi^2 u_n(t)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{du_n(t)}{u_n(t)} = \int_0^1 -n^2 \pi^2 dt \Leftrightarrow u_n(1) = u_n(0) e^{-n^2 \pi^2}$$

$$\Rightarrow \langle u(x, 1), \varphi(x) \rangle = \langle u(x, 0), \varphi(x) \rangle e^{-n^2 \pi^2}$$

$$\Leftrightarrow \langle f(x) - \alpha u(x, 0), \varphi_n(x) \rangle = \langle u(x, 0), \varphi_n(x) \rangle e^{-n^2 \pi^2}$$

$$\Leftrightarrow \langle u(x, 0), \varphi_n(x) \rangle = \frac{1}{\alpha + e^{-n^2 \pi^2}} \langle f(x), \varphi_n(x) \rangle.$$

Nghiệm $u(x, t)$ dạng khai triển các hàm riêng

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle u(x, t), \varphi_n(x) \rangle}{\langle \varphi_n(x), \varphi_n(x) \rangle} \varphi_n(x)$$

$$\Rightarrow g_{\alpha}(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle u(x, 0), \varphi_n(x) \rangle}{\langle \varphi_n(x), \varphi_n(x) \rangle} \varphi_n(x)$$

$$g_{\alpha}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha + e^{-n^2 \pi^2}} \langle f(x), \varphi_n(x) \rangle \varphi_n(x).$$

Suy ra

$$g_{\alpha}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}(\alpha + e^{-n^2 \pi^2})} f_n \sin n \pi x. \quad (7)$$

Ta thấy

$$\|g_{\alpha}\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(\alpha + e^{-n^2 \pi^2})^2} f_n^2 \leq \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2$$

$$= \frac{1}{2\alpha^2} \|f\|_2^2$$

nên chuỗi (7) hội tụ hay bài toán (II) tồn tại nghiệm; tính duy nhất nghiệm dễ thấy bởi phương trình toán tử $g = A^{-1}f$. Ta chứng minh nghiệm phụ thuộc liên tục vào dữ liệu. Thật vậy,

$$\begin{aligned}\|g_{1,\alpha} - g_{2,\alpha}\|_2^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(\alpha + e^{-n^2\pi^2})^2} (f_{1,n} - f_{2,n})^2 \\ &\leq \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} (f_{1,n} - f_{2,n})^2 = \frac{1}{2\alpha^2} \|f_1 - f_2\|_2^2\end{aligned}$$

Định lý 3. [3] Nghiệm bài toán (II) xấp xỉ nghiệm bài toán (I).

Chứng minh

Lấy $\alpha, \gamma > 0$ sao cho $|\alpha - \gamma| < \delta$, ta có

$$\begin{aligned}\|g_\alpha - g_\gamma\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}(\alpha + e^{-n^2\pi^2})} f_n \sin n\pi x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}(\gamma + e^{-n^2\pi^2})} f_n \sin n\pi x \right\| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2(\alpha + e^{-n^2\pi^2})} - \frac{1}{2(\gamma + e^{-n^2\pi^2})} \right]^2 f_n^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha - \gamma)^2 f_n^2}{2(\alpha\gamma + (\alpha + \gamma)e^{-n^2\pi^2} + e^{-2n^2\pi^2})^2} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{(\alpha - \gamma)^2 f_n^2}{2(\alpha\gamma + (\alpha + \gamma)e^{-n^2\pi^2} + e^{-2n^2\pi^2})^2} + \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(\alpha - \gamma)^2 f_n^2}{2(\alpha\gamma + (\alpha + \gamma)e^{-n^2\pi^2} + e^{-2n^2\pi^2})^2} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{(\alpha - \gamma)^2 f_n^2 e^{4n^2\pi^2}}{2} + \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(\alpha - \gamma)^2 f_n^2}{2\sqrt{\alpha\gamma}(\sqrt{\alpha\gamma} + e^{-n^2\pi^2})^2} \\ &= (\alpha - \gamma)^2 \sum_{n=1}^N \frac{f_n^2 e^{4n^2\pi^2}}{2} + \frac{(\alpha - \gamma)^2}{2\sqrt{\alpha\gamma}} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{f_n^2}{(\sqrt{\alpha\gamma} + e^{-n^2\pi^2})^2}.\end{aligned}$$

Do chuỗi (7) hội tụ ta chọn N đủ lớn để số hạng thứ hai nhỏ hơn $\frac{\varepsilon}{2}$; chọn δ đủ nhỏ để số hạng thứ nhất nhỏ hơn $\frac{\varepsilon}{2}$. Ta chứng minh được g_α là dãy Cauchy trong L_2 nên hội tụ.

Để chứng minh

$$g_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha + e^{-n^2\pi^2}} \langle f(x), \varphi_n(x) \rangle$$

$$\varphi_n(x) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} g(x).$$

Ta chứng minh

$$\begin{aligned}u_\alpha(x, 1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle g_\alpha(x), \varphi_n(x) \rangle e^{-n^2\pi^2} \varphi_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2\pi^2}}{\alpha + e^{-n^2\pi^2}} \langle f(x), \varphi_n(x) \rangle \varphi_n(x) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} f(x).\end{aligned}$$

Thật vậy

$$\begin{aligned}\|u_\alpha(\cdot, 1) - f\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^{-n^2\pi^2}}{\alpha + e^{-n^2\pi^2}} - 1 \right) \langle f(x), \varphi_n(x) \rangle \varphi_n(x) \right\| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^{-n^2\pi^2}}{\alpha + e^{-n^2\pi^2}} - 1 \right)^2 f_n^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^2}{(\alpha + e^{-n^2\pi^2})^2} f_n^2.\end{aligned}$$

Xem tiếp chứng minh trong [6], ta có kết quả $\|u_\alpha(\cdot, 1) - f\| \leq \alpha^\varepsilon \varepsilon^{-2}$, $\varepsilon \in (0, 2)$. Chứng tỏ $u_\alpha(x, t)$ là nghiệm bài toán thuận (I); do đó $g_\alpha(x) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} g(x)$.

Định lý 4. Nghiệm xấp xỉ giải số của bài toán (I) là

$$g(x) \approx g_{\delta, \alpha, N}(x) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{2}(\alpha + e^{-n^2\pi^2})} f_{\delta, n} \sin n\pi x.$$

Chứng minh

Xấp xỉ nghiệm của bài toán (II) bằng phương pháp chặt cắt, ta có nghiệm xấp xỉ

$$g_{\alpha, N}(x) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{2}(\alpha + e^{-n^2\pi^2})} f_n \sin n\pi x.$$

Do chuỗi (7) hội tụ nên

$$g_{\alpha}(x) \approx g_{\alpha,N}(x).$$

Để thấy do nghiệm của bài toán (II) phụ thuộc liên tục vào dữ liệu nên

$$g_{\alpha,N}(x) \approx g_{\delta,\alpha,N}(x) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{2}(\alpha + e^{-n^2\pi^2})} f_{\delta,n} \sin n\pi x,$$

trong đó $f_{\delta,n}$ là hệ số Fourier của f_{δ} . Từ các kết quả trên cho ta $g(x) \approx g_{\delta,\alpha,N}(x)$.

Kết luận. Bài viết làm rõ phương pháp tựa biên, cho phương trình parabolic ngược $u_t + Au = 0, u(T) = f$ với A là toán tử Laplace, các kết quả có được từ giải tích hiện đại không thông qua lý thuyết nửa nhóm của Clark và Oppenheimer năm 1994. Trong bài tới tác giả sẽ viết chi tiết hơn lịch sử bài toán, các đánh giá sai số và giải số.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Clark, G. W., & Oppenheimer, S. F. (1994). *Quasireversibility methods for non-well-posed problems*. Electronic Journal of Differential Equations, 1994(8), 1.
- [2] Colton, D. (1979). *The approximation of solutions to the backwards heat equation in a nonhomogeneous medium*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 72(2), 418-429.
- [3] Denche, M., & Bessila, K. (2005). *A modified quasi-boundary value method for ill-posed problems*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 301(2), 419-426.
- [4] Ewing, R. E. (1975). *The approximation of certain parabolic equations backward in time by Sobolev equations*. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 6(2), 283-294.
- [5] Kirsch, A. (2011). *An introduction to the mathematical theory of inverse problems* (Vol. 120). New York: Springer.
- [6] Phúc, N. P. (2006). *Phương pháp quasi-boundary value và phần tử hữu hạn áp dụng vào bài toán nhiệt ngược thời gian*: Luận văn Thạc sĩ Toán học chuyên ngành Toán Giải tích.
- [7] Pinchover, Y., & Rubinstein, J. (2005). *An introduction to partial differential equations* (Vol. 10). Cambridge university press.
- [8] Quân, P. H. (2005). *Bài toán ngược trong lý thuyết nhiệt*: Luận án Tiến sĩ Toán học chuyên ngành Toán giải tích.
- [9] Tuấn, N. H. (2009). *Bài toán nhiệt ngược thời gian phi tuyến*. Luận án Tiến sĩ Toán học chuyên ngành Toán giải tích.
- [10] Yildiz, B., & Özdemir, M. (2000). *Stability of the solution of backward heat equation on a weak compactum*. Applied mathematics and computation, 111(1), 1-6.